

luca.giuzzi@unibs.it

<https://luca-giuzzi.unibs.it/>

Algebra Lineare e geometria



Algebra $\rightarrow$ studio di strutture
e loro trasformazioni

lineare $\rightarrow$ struttura di
spazio vettoriale

$\rightarrow$ geometria analitica

- geometria affine
(euclidea)
e proiettiva.

Algebra e Geometria



Algebra Lineare

e sua applicazione alla geometria analitica.

Algebra $\rightarrow$ studio di strutture e loro trasformazioni.



spazio affine
(spazio proiettivo)

Affinità
(Proiettività)

Strutture.

- Insieme : 1) collezione non ordinata di oggetti distinti X tale che si può sempre dire se $x \in X$ o $x \notin X$

$$X = \{a, b\}.$$

- 2) e tale che si può sempre selezionare un elemento arbitrario $y \in X$.

$$X = \{a, b, b\}$$

$$X = \{b, a\}.$$

$$Y = \{x \in X \mid a = f(x)\}.$$

con X insieme.

$f(x)$ proposizione in x

paradosso di Russell.

Siano X, Y due insiemi
possiamo avere $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x \in X : x \in Y$.
per ogni $x \in X$ si ha $x \in Y$
 x è solo x .

$X \in Y$ cioè $Y = \{X, \dots\}$.

"l'insieme $Z = \{X \mid X \notin X\}$."

↓
non esiste!

Sia $Z \in Z \Rightarrow$ è falso $Z \notin Z \Rightarrow$
 $\Rightarrow Z \notin Z$

$Z \notin Z \Rightarrow$ per def. $Z \in Z$ $\hookrightarrow$

oss: Due insiemi X e Y sono detti disgiunti se

$$X \cap Y = \emptyset \quad \uparrow \text{insieme vuoto.}$$

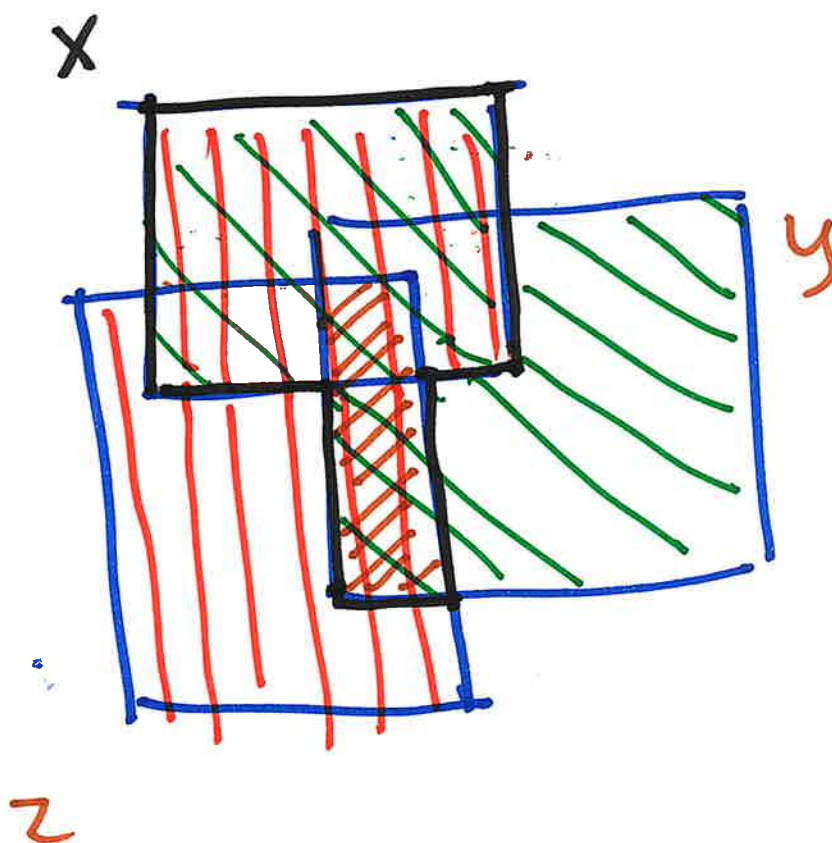
$\emptyset$ è l'insieme per cui $\forall x: x \notin \emptyset$

X e Y disgiunti $\Leftrightarrow \begin{aligned} &\forall x \in X: \cancel{y \in Y} \quad x \notin Y \text{ o equiv.} \\ &\forall y \in Y: y \notin X \end{aligned}$

$$X \cup Y = Y \cup X$$

$$X \cap Y = Y \cap X$$

} prop. commutativa.



$$\square = \mathcal{K} \cup (y \cap z)$$

Operazione: oggetto che
prende 1 o più
enti e produce
dei nuovi enti
(dello stesso tipo).

Definizione di unione e intersezione fra insiemi

Siano X, Y due insiemi

$$X \cap Y := \{x \in X \mid x \in Y\} \subseteq X$$

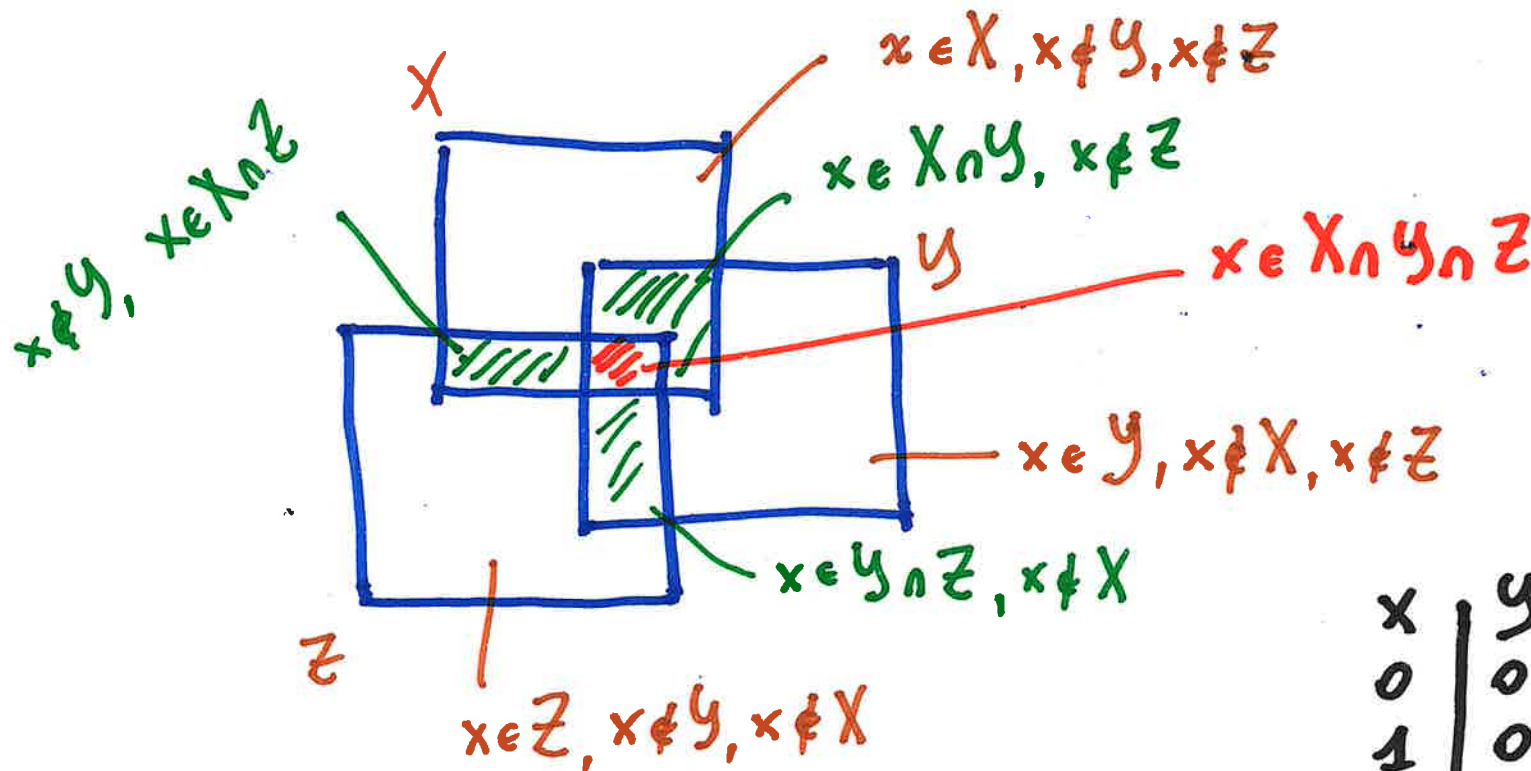
↓
uguale
per definizione

$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ oppure } x \in Y\}$$

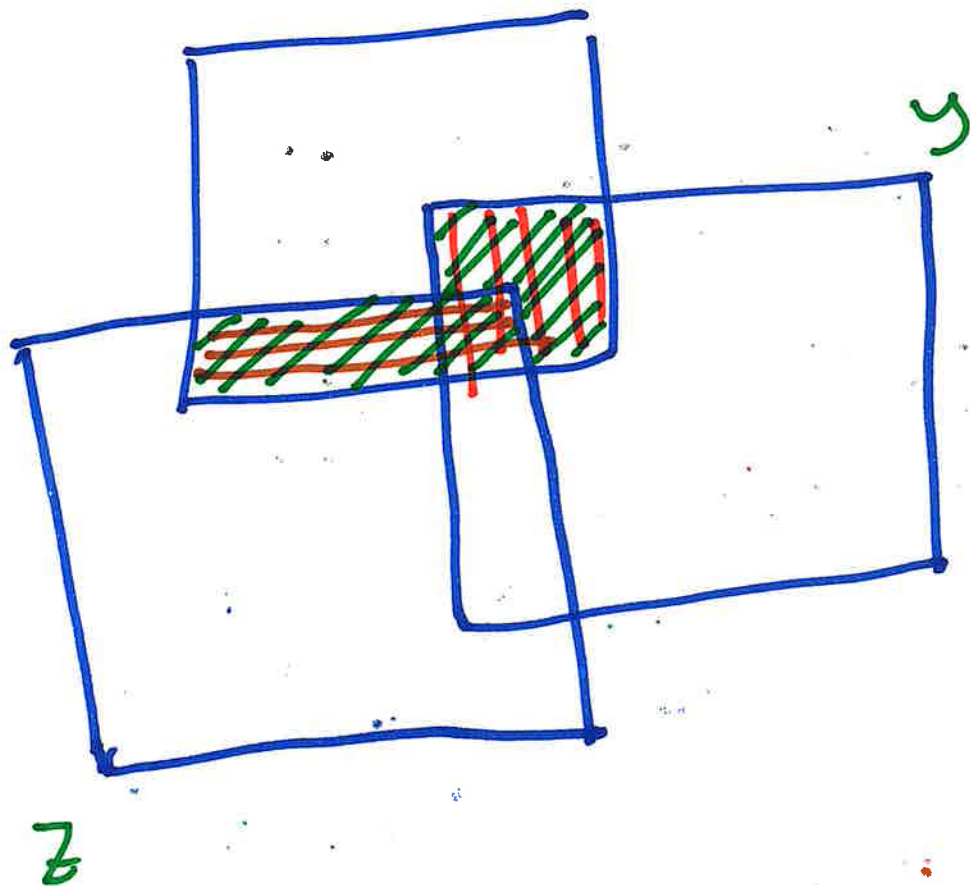
verifichiamo ora che

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$



x	y	z
0	0	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	1
0	1	1



$$\boxed{\text{diagonal lines}} = X \cap (Y \cup Z)$$

$$X \cap Y = \boxed{\text{vertical lines}}$$

$$X \cap Z = \boxed{\text{horizontal lines}}$$

$$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z)$$

$$X \cap (Y \cup Z)$$

X	Y	Z
1	0	1
1	1	0
1	1	1

X	Y	Z
1	1	0
1	0	1
1	1	1

$x \in X, Y, Z$

$X \vee (Y \wedge Z)$

0
1
0
1
0
1
1
1

$(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

0
1
0
1
0
1
1
1

$x \in X$

0
1
0
1
0
1
0
1

$x \in Y$

0
0
1
1
0
0
1
1

$x \in Z$

0
0
0
0
1
1
1
1

2 valori
possibili: $\{0, 1\}$.

x	0	1
0	0	0
1	0	1

AND
(ET)

x	0	1
0	1	0
1	0	1

NOT

$0 = F$

$1 = V$

x	0	1
0	0	1
1	1	1

OR
(VEL)

x	0	1
0	0	1
1	1	0

XOR
(AUT)

$\forall$

$\forall$ per ogni

$$A \Rightarrow B$$

" $\Rightarrow$ " implies

~~$\neq$~~ $\underline{1}$

$\Rightarrow$	0	1	A
0	1	0	
1	1	1	
B			

$$(\neg A \vee B)$$

A:	1	$\vee$	B: 1	
$\neg A$:	0	$\vee$	B: 1	$\rightarrow 1$
A:	0	$\vee$	B: 0	
$\neg A$:	1	$\vee$	B: 0	$\rightarrow 1$
A:	0	$\vee$	B: 1	
$\neg A$:	1	$\vee$	B: 1	$\rightarrow 1$
A:	1	$\vee$	B: 0	
$\neg A$:	0	$\vee$	B: 0	$\rightarrow 0$

$$A \Leftrightarrow B$$

A "se e solo se" B
A è equivalente a B.

$\Leftrightarrow$	0	1	A
0	1	0	
1	0	1	

B

$$(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$$

	0	1
0	1	0
1	1	1

	0	1
0	0	1
1	0	1

	0	1
0	1	1
1	0	1

OR come si scrive in termini di AND e XOR.

$$A \vee B \equiv \neg(\neg(A \& B) \vee (A \neq B))$$

A	B	$\neg(A \& B)$	$\neg(A \& B)$	$A \neq B$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$\Rightarrow \neg(A \& B) \vee (A \neq B)$$

1	0
0	0
0	0
0	0

0
1
1
1

$$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

N.B. $A \setminus B \neq B \setminus A$

A, B due insiemi

Definiamo come $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$

ove

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}.$$

coppie ordinate di elementi.

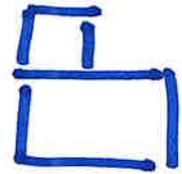
$$(a, b) \neq (b, a) \quad \text{se } a \neq b$$

$$(a, b) \neq (a, a)$$

$$(a, b) \quad \& \quad a = b \Rightarrow \\ (a, a) = \{a, \{a\}\}$$



$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\} \quad \text{se } a \neq b$$



$$(b, a) = \{b, \{a, b\}\}$$

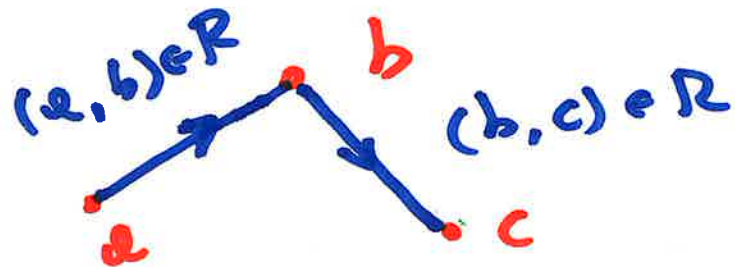
$b \notin (a, b)$ ~~ma~~ $b \in (b, a)$. Come
 $\{a, b\} \in (a, b)$ $\{b, a\} \in (b, a)$ insieme!

In generale diremo che a, b sono entrambi
 elementi di (a, b) .

Relazioni su di un insieme

A insieme

$R \subseteq A \times A$ è una relazione su A



R è

• RIFLESSIVA

$\Leftrightarrow \forall a \in A : (a, a) \in R$

• ~~simmetrica~~

SIMMETRICA

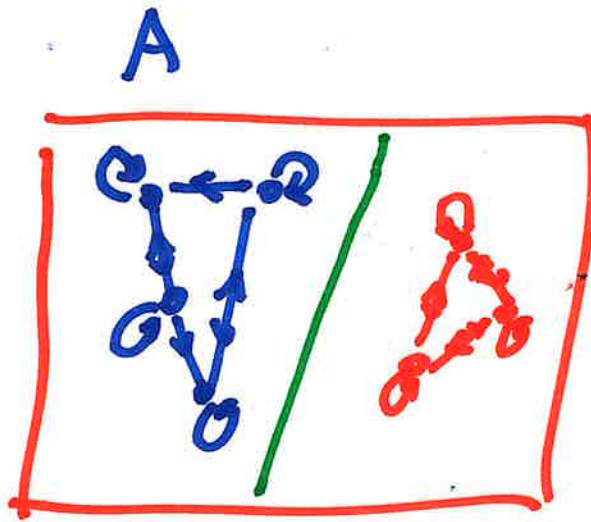
$\Leftrightarrow \forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

• TRANSITIVA

$\Leftrightarrow \forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$

• di EQUIVALENZA $\Leftrightarrow R + S + T.$

$R = \text{"AVERE LO STESSO COLORE"}$



CLASSE DI
EQUIVALENZA

$$\{ \text{OGGETTI} \}_{\text{BLU}} \cup \{ \text{OGGETTI} \}_{\text{ROSSI}} = A$$

$$\{ \text{OGGETTI} \}_{\text{BLU}} \cap \{ \text{OGGETTI} \}_{\text{ROSSI}} = \emptyset$$

Teorema: Sia A un insieme
 $R \subseteq A \times A$ una relazione di
equivalenza.

Per ogni $a \in A$ sia
 $[a]_R := \{ b \in A : (a, b) \in R \}.$

ALLORA

$$1) \bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

$$2) \forall a \in A, \forall b \in A \setminus [a]_R : [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$$

L'insieme $\{ [a]_R \mid a \in A \} = A/R$ è detto insieme
quoziente di A su R .